

I. GYÖKVONÁS

Négyzetgyökök

1. Számítsd ki számológép nélkül a pontos értékét:

a) $\sqrt{20} + \sqrt{45}$

b) $\sqrt{12} + \sqrt{3} - \sqrt{27}$;

c) $\sqrt{28} - \sqrt{63} + \sqrt{7}$;

d) $\sqrt{200} - \sqrt{18} - \sqrt{50}$

2. Melyik a nagyobb?

a) $6\sqrt{3}$ vagy $5\sqrt{2}$;

b) $3\sqrt{5}$ vagy $4\sqrt{3}$;

c) $2\sqrt{7}$ vagy $3\sqrt{3}$;

d) $4\sqrt{10}$ vagy $3\sqrt{15}$;

e)

3. Számítsd ki számológép nélkül a pontos értékét:

a) $\sqrt{\sqrt{61} - 5} \cdot \sqrt{\sqrt{61} + 5}$;

b) $\sqrt{12 + \sqrt{23}} \cdot \sqrt{12 - \sqrt{23}}$;

c) $\sqrt{\sqrt{75} + \sqrt{59}} \cdot \sqrt{5\sqrt{3} - \sqrt{59}}$;

d) $\sqrt{\sqrt{41} - 4\sqrt{2}} \cdot \sqrt{\sqrt{41} + \sqrt{32}}$;

4. Gyöktelenítsd a törtek nevezőjét!

a) $\frac{2}{\sqrt{2}}$;

b) $\frac{5}{\sqrt{3}}$;

c) $\frac{10}{\sqrt{5}}$;

d) $\frac{3}{\sqrt{6}}$;

e) $\frac{a}{\sqrt{a}}$;

f) $\frac{6}{7\sqrt{3}}$;

g) $\frac{21}{4\sqrt{7}}$;

h) $\frac{2}{3\sqrt{2}}$;

i) $\frac{x}{2\sqrt{x}}$;

j) $\frac{7}{\sqrt{13} - \sqrt{6}}$;

k) $\frac{8}{\sqrt{7} + \sqrt{3}}$;

l) $\frac{\sqrt{3} - \sqrt{2}}{\sqrt{3} + \sqrt{2}}$

n-edik gyök

5. Végezd el a következő gyökvonásokat! Indokold eredményeid a gyökvonás definíciója alapján!

a) $\sqrt[3]{8}$;

c) $\sqrt[3]{27}$;

e) $\sqrt[3]{125}$;

g) $\sqrt[6]{1000000}$

b) $\sqrt[4]{16}$;

d) $\sqrt[5]{32}$;

f) $\sqrt[4]{10000}$;

6. Végezd el a következő gyökvonásokat!

(Kell tudni hozzá: $\sqrt[n]{a^n} = a$, ha n páratlan; valamint $\sqrt[n]{a^n} = |a|$, ha n páros.)

a) $\sqrt[6]{a^6}$;

b) $\sqrt[13]{b^{13}}$;

c) $\sqrt[10]{c^{20}}$;

d) $\sqrt[5]{a^{15}}$

7. Hozz ki a gyökjel elé, amit tudsz, majd vonj össze!

a) $\sqrt[4]{32} + \sqrt[4]{162}$;

b) $\sqrt[3]{24} + \sqrt[3]{3}$

8. Írd fel egyetlen gyökjellel a következő kifejezést és hozd a lehető legegyszerűbb alakra!

a) $\sqrt{2} \cdot \sqrt[4]{2}$;

b) $\sqrt[3]{3} \cdot \sqrt{5}$;

c) $\sqrt[5]{2} \cdot \sqrt[4]{2}$;

d) $\sqrt{a^3 \sqrt{a^4 \sqrt{a}}}$

9. Írd fel egyetlen gyökjellel a következő kifejezést, és hozd a lehető legegyszerűbb alakra!

a) $\sqrt[5]{2} \cdot \sqrt{2}$;

b) $\frac{\sqrt{5}}{\sqrt[4]{5}}$;

$$c) \frac{\sqrt[5]{3} \cdot \sqrt{3}}{\sqrt[3]{3}};$$

$$d) \frac{\sqrt[3]{c} \cdot \sqrt[4]{c}}{\sqrt{c^3}}$$

10. Számítsd ki számológép nélkül a pontos értékét!

$$a) \sqrt[3]{\sqrt{10} - \sqrt{2}} \cdot \sqrt[3]{\sqrt{10} + \sqrt{2}};$$

$$b) \sqrt[3]{7 - \sqrt{17}} \cdot \sqrt[3]{7 + \sqrt{17}}$$

II. A MÁSODFOKÚ EGYENLET

11. Oldd meg az egyenletet a valós számok halmazán!

$$a) 2x^2 - 4x - 6 = 0;$$

$$b) x^2 + 7x + 10 = 0;$$

$$c) -60 + 2x^2 - 2x = 0$$

$$d) 4x^2 - 224 + 4x = 0$$

$$e) 6x = x^2 + 5;$$

$$f) 2x^2 = x + 3;$$

$$g) 0 = x^2 - 8x;$$

$$h) x^2 - 9 = 0;$$

$$i) 2x^2 + 3x - 2 = 0;$$

$$j) 80 - x^2 = x^2 + 6x$$

$$k) 80 + x(3x + 8) = 2x(x - 5)$$

$$l) 27x - 3x^2 - 42 = 0$$

$$m) x^2 = 4 + 3x$$

$$n) 18x - 3x^2 - 24 = 0$$

$$o) 16 + 2x^2 + 18x = 0$$

$$p) 6x - 3x^2 + 189 = 0$$

$$q) 200 - 20x - 4x^2 = 0$$

Lásd még: Tankönyv

12. Oldd meg a következő egyenleteket a valós számok halmazán!

a) $(1+2x)(3-x)+x^2=9$

b) $9x^2-9x+2=(3x-1)(3x-2)$

c) $47-x(3x+4)=2(17-2x)-62$

d) $10(x-2)+19=(5x-1)(1+5x)$

e) $(x-7)(x+3)+(x-1)(x+5)=102$

f) $(3x-4)^2-(6x-7)^2=0$

g) $\frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 7x + 12} = 2$

h) $\frac{x^2 + 6x - 7}{3x^2 - x - 2} = 5$

i) $\frac{-3x^2 + x}{3x^2 - 4x + 1} = 3$

j) $\frac{x+4}{3} = \frac{2x+1}{x}$

k) $\frac{12}{x} - \frac{7x-6}{6} + 5x - 26 = 0$

l) $\frac{3x-7}{x+5} = \frac{x-3}{x+2}$

13. Írj fel legalább két olyan másodfokú egyenletet (a lehető legegyszerűbb alakban), amelynek gyökei:

a) 5 és 2;

b) 7 és 4

c) 3 és -8;

d) -4 és 7;

e) -1 és -2;

f) 0 és -1

g) -3 és $\frac{1}{2}$;

h) -0,1 és -3!

Amelyikben nem egész számok az együtthatók, azt alakítsd egész együtthatóssá!

14. Egyszerűsítsd a következő törteket!

a) $\frac{2x^2 + 3x - 2}{3x^2 + 3x - 6}$;

b) $\frac{6x^2 + x - 2}{-2x^2 + 5x - 2}$;

c) $\frac{x^2 - 3x - 10}{x^2 + 6x + 8}$;

15. Oldd meg az alábbi magasabb fokú, másodfokúra visszavezethető egyenletet!

a) $4x^4 - 17x^2 + 4 = 0$;

b) $16x^4 - 17x^2 + 1 = 0$

c) $2x^4 - x^2 - 1 = 0$

d) $3x^4 - 7x^2 + 2 = 0$

e) $4x^4 - 3x^2 - 1 = 0$

- f) $2x^4 + 2x^2 - 4 = 0$;
 g) $x^4 + 5x^2 + 6 = 0$;
 h) $x^6 - 7x^3 - 8 = 0$
 i) $-x^6 - 19x^3 + 216 = 0$;
 j) $x^8 - 17x^4 + 16 = 0$
 k) $x^8 - 15x^4 - 16 = 0$

16. Oldd meg az alábbi egyenlőtlenséget!

- a) $x^2 - 6x + 5 < 0$;
 b) $2x^2 - 2x - 12 \geq 0$;
 c) $-2x^2 + 5x + 7 \leq 0$;
 d) $-x^2 + x + 20 > 0$;
 e) $x^2 - 6x + 10 > 0$;

17. Oldd meg az alábbi egyenletet!

- a) $\sqrt{5-x} = x-3$;
 b) $x-2 = \sqrt{3x-6}$;
 c) $\sqrt{2x+2} = 3x-1$;
 d) $\sqrt{6-2x} = 9+x$;

III. GEOMETRIA (HASONLÓSÁG)

Magasságtétel, befogótételek

18. Egy derékszögű háromszög átfogójához tartozó $\sqrt{12}$ cm-es magassága az átfogót két olyan szakaszra bontja, melyek hossza 1 cm-rel tér el egymástól. Mekkora a befogók?
 19. Egy derékszögű háromszög egyik befogója 5 cm, az átfogóra eső merőleges vetülete 2 cm. Mekkora a többi oldal és az átfogóhoz tartozó magasság?

Hasonló síkidomok területe, hasonló testek térfogata

20. Egy háromszög 7 cm, a hozzá tartozó magasság 6 cm. Ennek a magasságnak a felezőpontján át húzzunk a 6 cm-es oldallal egy párhuzamost! Számítsd ki a keletkezett síkidomok területét!
 21. Egy háromszög egyik oldala 10 cm, a hozzá tartozó magasság 8 cm. A 10 cm-es oldallal párhuzamosan egy egyenessel két egyenlő területű részre bontjuk a háromszöget. Milyen távol van ez a párhuzamos a 10 cm-es oldaltól?
 22. Egy 10 cm magas, 4 cm alapélű, négyzet alapú (szabályos négyoldalú) gúlát a magasság felezőpontján át az alaplappal párhuzamos síkkal elmeteszünk. Mekkora a keletkezett testek térfogata?
 23. Egy 15 cm magas gúlát az alapjától milyen távolságban kell az alaplappal párhuzamos síkkal két egyenlő térfogatú részre bontani?

24. Egy 20 cm magas, pattogatott kukoricával tele tölcsérből megesszük a kukorica felét. Milyen magasan van a maradék kukorica?

IV. HEGYESSZÖGEK SZÖGFÜGGVÉNYEI (TRIGONOMETRIA 1.)

Szögfüggvények használata derékszögű háromszögekben

25. Egy derékszögű háromszög egyik befogója 10 cm, a vele szemkötti szög 70° . Mekkora az oldalai?
26. Egy derékszögű háromszög átfogója 15 cm. A háromszög egyik hegyesszöge $42^\circ 10'$ -os. Mekkora a többi oldal?
27. Egy 2 m hosszú létrát a falnak döntöttünk. A létra alja 1,3 m-re van a faltól. Mekkora szöget zár be a talajjal a létra?
28. Egy torony árnyéka a vízszintes talajon 75m hosszú. Milyen magas a torony, ha a napsugarak a vízszintes talajtól számítva 60 fokos szögben esnek a talajra?
29. Egy lejtő a vízszintessel 24° -os szöget zár be, és 2,8 m magasra visz. Mekkora a lejtő hossza és a vízszintesre eső vetülete?
30. Mekkora az egyenlő szárú háromszög alapja, ha szára 5,6 cm, az alapon fekvő szögei $58^\circ 13'$ -esek?
31. Egy egyenlő szárú háromszög alapja 12,5 cm, a szárszöge 52° -os. Mekkora a területe?
32. Egy téglalap átlói 33° -os szöget zárnak be egymással. Rövidebbik oldala 5 cm. Mekkora a hosszabbik oldala és az átlói?
33. Gergő szemmagassága a talajtól 175 cm-re van. Milyen magas az a fa, aminek tetejét $72^\circ 12'$ emelkedési szögben, alját $13^\circ 30'$ depressziószögben látja?
34. 35 m távolságból egy épület egyik ablakának felső párkánya $40^\circ 2'$, alsó párkánya $38^\circ 22'$ emelkedési szögben látszik. Milyen magas az ablak?

Adott egy szögfüggvény, számold ki a többi!

35. $\sin \alpha = 0,6$. α kiszámolása nélkül számold ki α többi szögfüggvényét!
36. $\cos \alpha = 0,15$. α kiszámolása nélkül számold ki α többi szögfüggvényét!
37. $\operatorname{tg} \alpha = 1,6$. α kiszámolása nélkül számold ki α többi szögfüggvényét!
38. $\operatorname{ctg} \alpha = 2,8$. α kiszámolása nélkül számold ki α többi szögfüggvényét!
39. $\sin \alpha = \frac{2}{3}$. α kiszámolása nélkül számold ki α többi pontos szögfüggvényét!

Nevezetes szögek szögfüggvényértékei

40. Számold ki a következő kifejezés pontos értékét! (Számológép nem használható!)

$$\cos 30^\circ \cdot \operatorname{tg} 60^\circ - \operatorname{ctg} 60^\circ \cdot \sin 60^\circ$$

41. Számold ki a következő kifejezés pontos értékét! (Számológép nem használható!)

$$\frac{\operatorname{tg} 45^\circ + \sin 45^\circ \cdot \cos 45^\circ}{\sin 30^\circ}$$

42. Számold ki a következő kifejezés pontos értékét! (Számológép nem használható!)

$$\frac{\operatorname{tg} 45^\circ \cdot \operatorname{ctg} 30^\circ - 2 \operatorname{ctg} 45^\circ \cdot \cos 30^\circ}{\sin 30^\circ}$$

43. Számold ki a következő kifejezés pontos értékét! (Számológép nem használható!)

$$\frac{\sin 60^\circ \cdot \cos 45^\circ}{\sin 45^\circ}$$

44. Számold ki a következő kifejezés pontos értékét! (Számológép nem használható!)

$$\frac{3 - 2 \sin 30^\circ}{\cos 45^\circ \cdot \sin 45^\circ}$$

45. Számold ki a következő kifejezés pontos értékét! (Számológép nem használható!)

$$\cos 10^\circ \cdot \sin 80^\circ + \sin 10^\circ \cdot \cos 80^\circ$$

46. Számold ki a következő kifejezés pontos értékét! (Számológép nem használható!)

$$\sin 33^\circ \cdot \cos 57^\circ + \cos 33^\circ \cdot \sin 57^\circ$$

47. Számold ki a következő kifejezés pontos értékét! (Számológép nem használható!)

$$2(\cos 1^\circ \cdot \sin 89^\circ + \cos 89^\circ \cdot \sin 1^\circ) - 3$$

48. Oldjuk meg a következő egyenleteket (fokban és radiánban is):

a) $\sin x = 0,5$

b) $\sin x = -0,9$

c) $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$

d) $\sin x = 1$

e) $\sin x = 0$

f) $\sin x = -1$

g) $\sin x = 2$

h) $\cos x = 0,5$

i) $\cos x = -0,6$

j) $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$

k) $\cos x = 1$

l) $\cos x = 0$

m) $\cos x = -1$

n) $\cos x = -1,5$

o) $\operatorname{tg} x = 0,7$

p) $\operatorname{tg} x = -2,5$

q) $\operatorname{tg} x = \frac{\sqrt{3}}{3}$

r) $\operatorname{tg} x = 1$

s) $\operatorname{tg} x = 0$

t) $\operatorname{tg} x = -1$

u) $\operatorname{tg} x = -5$

v) $\operatorname{ctg} x = 1,9$

w) $\operatorname{ctg} x = -7,1$

x) $\operatorname{ctg} x = \frac{\sqrt{3}}{3}$

y) $\operatorname{ctg} x = 1$

z) $\operatorname{ctg} x = 0$

aa) $\operatorname{ctg} x = -1$

bb) $\operatorname{ctg} x = -3$

49. Oldjuk meg a következő egyenleteket (fokban és radiánban is):

- a) $2\sin^2 x - \sin x - 1 = 0$
- b) $2\cos^2 x - 9\cos x - 5 = 0$
- c) $\operatorname{tg}^2 x - 5\operatorname{tg} x + 6 = 0$
- d) $2\sin^2 x + \cos^2 x - 1 = 0$
- e) $3\sin^2 x - \cos^2 x = 3$
- f) $3\cos^2 x - \sin^2 x = 2$

V. KOMBINATORIKA

Kombinatorika

Ismétlés nélküli permutáció

50. Öt diák (A, B, C, D, E) elmegy moziba, és egymás mellé kapnak jegyeket.
- a) Hányféle sorrendben ülhetnek le egymás mellé?
 - b) Hányféle sorrendben ülhetnek le egymás mellé, ha A és C mindenképp egymás mellé szeretne ülni?
 - c) Hányféle sorrendben ülhetnek le egymás mellé, ha A és C semmiképp sem szeretne egymás mellé szeretne ülni?
 - d) Az 5 diák mozi után cukrászdába megy, s egy kör alakú asztal köré ülnek. Hányféleképpen foglalhatnak helyet?
51. Matekból, irodalomból, történelemből és informatikából kell házi feladatot készítenem. Hányféle sorrendben tehetem ezt meg?
52. Hat lány és 5 fiú együtt megy el a színházba. A jegyek egymás mellé szólnak.
- a) Hányféleképpen ülhetnek le?
 - b) Hányféleképpen foglalhatnak helyet, ha fiú fiú mellé, lány lány mellé nem ülhet?
53. Négy házaspár lép be egy szobába, az ajtón egyszerre legfeljebb egy ember tud belépni.
- a) Hányféle sorrendben juthatnak be a szobába?
 - b) Hányféle sorrendben mehetnek be, ha két egymást követő belépő ember csak különböző nemű lehet?
 - c) Hányféle sorrendben mehetnek be, ha nő az első, és minden nőt a férje követ?
54. András, Balázs, Csaba, Dénes, Endre és Ferenc egy koncerten egymás mellett foglalnak helyet. András és Ferenc úgy döntenek, hogy egymás mellé ülnek.
- a) Hányféleképp ülhet le a társaság?
 - b) Hányféleképp ülhetnek le, ha András és Ferenc semmiképp sem akarnak egymás mellé ülni?
 - c) Koncert után beülnek egy étterembe, ahol kör alakú asztalnál vacsoráznak. Hányféleképp foglalhatnak helyet, ha bárki bárki mellé ülhet?
 - d) Hányféleképp foglalhatnak helyet, ha András és Ferenc még mindig nem szeretnék egymás mellett ülni?
 - e) Hányféleképp ülhetnek le az étteremben, ha András, Balázs és Csaba valamilyen sorrendben egymás mellett akarnak vacsorázni?
55. 8 lányból és 10 fiúból hányféleképpen lehet összeállítani a lehető legtöbb egyszerre táncoló párt?

Ismétléses permutáció

56. Egy 10 fős társaság 3 tiramisut, 4 dobostortát, 2 gesztenyepürét és 1 somlói galuskát rendel. Hányféleképpen oszthatja ki a felszolgáló az édességeket, ha nem tudja, ki mit rendelt?
57. Hányféle sorrendben írhatók le a MATEMATIKA szó betűi?

58. Hányféle sorrendben írhatók le a MAGYARORSZÁG szó betűi?
59. Jocónak 3 egyforma fekete, 2 egyforma kék, 2 egyforma zöld és egy csíkos nyakkendője van. Hányféleképp viselheti ezeket 8 napon át, ha egy-egy napon egy nyakkendőt használ, és minden nap másikat?
60. Hányféle hatjegyű szám készíthető az 1, 2, 2, 3, 3, 3 számjegyekből?
61. Hányféle kilencjegyű, 5-tel osztható szám készíthető a 0, 2, 4, 4, 4, 6, 6, 6, 6 számjegyekből?

Ismétlés nélküli variáció

62. Tíz fő futóversenyen vesz részt. Hányféleképpen oszthatják ki az első három helyezettnek járó arany-, ezüst- és bronzérmeket?
63. Hány olyan ötjegyű szám van, amiben minden számjegy különböző?
64. 10-féle sütemény van az asztalon. Négy darab különböző süteményt szeretnénk enni. Hányféleképpen lehetséges ez?
65. Egy iskolai rendezvényen 150 tombolajegyet adnak el. Ezek tulajdonosai között 10 különböző nyereményt sorsolnak ki. Hányféleképp történhet ez?
66. Egy 36 fős osztályban egy könyvet, egy társasjátékot, egy labdát, egy töltőtollat és egy ceruzát sorsolnak ki azzal a feltétellel, hogy minden tanuló csak egy tárgyat kaphat. Hányféleképp végződhet a sorsolás?
67. Nyolcféle fagylaltból három különböző ízűt választunk egy tölcsérbe. Hányféleképp történhet ez?

Ismétléses variáció

68. Az étteremben 5-féle főétel közül választhatunk, bármelyikből nagy mennyiség áll rendelkezésre. Egy 8 főből álló társaság hányféleképpen választhat belőlük egy-egy ételt, ha elvileg minden ételt mindenki szívesen elfogyaszt?
69. Hányféleképpen lehet kitölteni egy 13+1-es totószelvényt?
70. Hány ötjegyű szám van?
71. Hány ötjegyű szám készíthető a 0, 1, 2 számjegyek felhasználásával?
72. Tizenöt tanuló között hányféleképpen lehet kiosztani öt különböző tárgyat, ha egy tanuló több tárgyat is kaphat?
73. Tízféle fagylaltból választunk 4 gombócot egy tölcsérbe, egy féléből többet is választhatunk. Hányféleképp alakulhat a tölcsér tartalma?
74. 1990 előtt két betű – négy szám típusú rendszámuk volt a gépjárműveknek. Hányféle rendszám volt létrehozható, ha a magyar ábécé 26 egyjegyű betűjét és bármilyen számjegyet használhatunk fel?
75. Hányféle három betű – három szám típusú rendszámot lehet létrehozni?

Ismétlés nélküli kombináció

76. Tíz fő futóversenyen vesz részt. Hányféleképpen oszthatják ki az első három helyezettnek járó egyforma oklevelet?
77. Egy 30 fős osztályból hányféleképpen lehet kiválasztani két diákönkormányzati képviselőt?
78. Hányféleképpen lehet kitölteni egy ötös lottószelvényt?
79. Egy 32 lapos magyar kártyából 6 lapot húzunk. Hányféleképpen lehetséges ez?
80. Háromféle gyümölcsből szeretnénk 1-1 kg-ot vásárolni a piacon, ahol a gyümölcsök közül almát, körtét, sárgadinnyét, szilvát és őszibarackot árulnak. Hányféleképp végződhet a vásárlás?
81. Húsz ismerősünk közül tízet szeretnénk buliba hívni. Hányféleképp tehetjük ezt meg?
82. Egy 36 fős osztályból három diákot választunk, akik szerepelnek egy iskolai ünnepségen. Hányféleképp történhet a válogatás?
83. 12-féle fagylaltból 5 különböző ízű gombócot választunk egy fagylaltkehelybe. A gombócok elhelyezkedése a kehelyben közömbös számunkra. Hányféleképp történhet ez?
84. Egy szálláson 2 db 5 ágyas, 1db 4 ágyas és 1 db 3 ágyas szobában száll meg 17 diák. Hányféleképpen helyezkedhetnek el a szobákban, ha egy szobában levő férőhelyek között nem teszünk különbséget?